УДК 681.519

ОБЗОР ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ, ПРИМЕНЯЕМЫХ В ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА СИСТЕМ ЭЛЕКТРОПРИВОДА

REVIEW OF INTEGRAL TRANSFORMATIONS APPLIED IN THE TASKS OF ANALYSIS AND SYNTHESIS OF ELECTRIC DRIVE SYSTEMS

Иванов Владимир Михайлович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Прикладная математика», Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Россия, 620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19. E-mail: vm_ivanov@mail.ru, Тел.: +7(922)207-04-87
Бородин Михаил Юрьевич, кандидат технических наук, доцент кафедры «Электропривод и автоматизация промышленных установок», Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Россия, 620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19. E-mail: bmu@k66.ru, Тел.: +7(922)223-66-54
Кондаков Константин Андреевич, магистрант кафедры «Электропривод и автоматизация промышленных установок», Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Россия, 620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19. E-mail: chelovek103@mail.ru. Тел.: +7(982)640-54-35

Vladimir M. Ivanov, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department «Applied Mathematics», Ural Federal University named after the first President of Russia B.N.Yeltsin, 620002, Mira street, 19, Ekaterinburg, Russia. E-mail: vm_ivanov@mail.ru. Ph.: +7(922)207-04-87
Mikhail Yu. Borodin, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department «Electrodrive and automation of industrial plants», Ural Federal University named after the first President of Russia B.N.Yeltsin, 620002, Mira street, 19, Ekaterinburg, Russia. E-mail: bmu@k66.ru. Ph.: +7(922)223-66-54
Konstantin A. Kondakov, Student, Department « Electrodrive and automation of industrial plants», Ural Federal University named after the first President of Russia B.N.Yeltsin,620002, Mira str., 19, Ekaterinburg, Russia. E-mail: chelovek103@mail.ru. Ph.: +7(982)640-54-35

Аннотация: В данной статье рассмотрен набор интегральных преобразований, которые потенциально могут быть использованы для получения спектральных представлений сигналов автоматических систем Обозначены преимущества и недостатки рассмотренных преобразований для класса САУ, характерных для электропривода.
Abstract: The paper presents set of integral transformations that can potentially be used to obtain spectral representations of signals of automatic systems. The advantages and disadvantages of the considered transformations for the ACS class, characteristic for the electric drive, are indicated.
***Ключевые слова*:** преобразование Лапласа; преобразование Карунена-Лоэва; преобразование Гильберта; вейвлет-преобразование; электропривод; регулирование в спектральной области.
***Key words*:** Laplace transform; Karunen-Loeve transform; Hilbert transform; wavelet transform; electrical drive; regulation in the spectral area.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

Изображение по Лапласу *F(p)*, задаваемое интегральным преобразованием:

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt \qquad (1)$$

Где $p = \alpha + i\omega$ – комплексное число – оператор преобразования Лапласа; $f(t)$ – оригинал (сигнал автоматической системы), определяет комплекснозначную функцию p, компонентам которого может быть придан следующий смысл. Будем рассматривать несобственный интеграл (1) как свертку оригинала *f(t)* на ядре e^{-pt}, известно, что это ядро может рассматриваться как обобщенная гармоническая функция:

$$e^{-pt} = e^{-\alpha t}\cos\omega t - ie^{-\alpha t}\sin\omega t \qquad (2)$$

Таким образом, преобразование (1) по аналогии с Фурье-преобразованием представляет разложение оригинала *f(t)* по непрерывному набору пробных функций, задаваемых (2) как затухающие синусоидальные функции времени. Более того, Фурье-преобразование является частным случаем преобразования (1), если в выражении $p = \alpha + i\omega$ принять $\alpha = 0$, то есть сжать пробные сигналы (2) незатухающими синусоидами.

Это преобразование прочно вошло в инженерную практику, а результат, его называемый спектром $S(\omega)$ сигнала *f(t)* позволяет давать наглядную картину частотных характеристик элементов САУ и лежат в основе целого букета методов.

В данной статье предлагает ввести понятие двухмерного спектра сигнала $S(\alpha,\omega)$ который характеризовал бы сигнал САУ как результат разложения в базисе (2), с дальнейшим обобщением на спектр в базисе стандартных настроек контуров САУ. Это позволит принципиально иначе строить автоматические системы, рассматривая разложение сигнала в спектр как средство распараллеливания вычислений. Реализация таких алгоритмов в управлении могла быть возможна на программируемые логические интегральные схемы (ПЛИС) в виду их особенностей работы.

С этой целью *f(t) = 1(t)* – единичная ступенчатая функция Хэвисайда, тогда *F(p)=1/p*;
Где $p = \alpha + i\omega$ – оператор преобразования Лапласа.

$$F(p) = \frac{1}{\alpha+i\omega} = \frac{\alpha-i\omega}{\alpha^2-\omega^2} = |F(p)|e^{i\varphi} \quad (3)$$

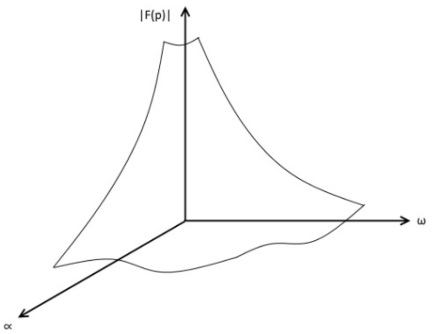

Рис. 1. Поверхность, представляющая изображение *F(p)* в пространстве параметров (α,ω)

$$F(p) = \sqrt{\frac{\alpha^2}{(\alpha^2+\omega^2)} + \frac{\omega^2}{(\alpha^2+\omega^2)}} = \frac{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}{\alpha^2+\omega^2} \quad (4)$$

$$\varphi(\omega) = arctg\,\frac{\omega}{\alpha} \quad (5)$$

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КАРУНЕНА-ЛОЭВА

С формально-математической точки зрения преобразование Карунена-Лоэва представляет собой разложение сигнала $X(t)$ по базису ортогональных функций, каждая из которых является собственной функцией интегрального "характеристического" уравнения с симметричным непрерывным ядром:

$$\int_0^T K(t,s)\varphi_i(s)ds = \lambda_i\varphi_i(t) \quad (6)$$

Основная идея заключается именно в том, что существует и используется некое ядра, связанного со свойствами сигнала $X(t)$. Это дает нам возможность использовать такую форму сигнала, которая часто встречается в задачах электропривода, например, скорость электропривода при ступенчатом задании. При заданном виде ядра приведенное интегральное уравнение определяет ортогональный базис разложения по его собственным функциям. Это значительно упрощает разложение, а также минимизирует квадрат ошибки.

Мы рассматриваем КЛ-преобразование применительно к растровым изображениям. Такое изображение всегда содержит избыточную информацию, как следствие содержательного и шумового взаимовлияния его соседних элементов. В связи с этим рассматриваются:

- Ковариационная матрица *K*, которая описывает аппроксимацию отсчетов в координатной плоскости изображения *(x,y)* многомерной гауссовой функцией распределения.
- Соответствующая ей корреляционная матрица *R*.

Полезность КЛ-преобразования для сокращения избыточности таких изображений очевидна. Массив отсчетов изображения заменяется набором переменных, имеющих различные статистические веса. Путем отбрасывания переменных с малым статистическим весом, и сохранения остальных, можем достигнуть многократного сжатия изображения. В процессе отбрасывания переменных возникает среднеквадратичное отклонение от оригинала. Особенность КЛ-преобразования состоит в том, что из всех линейных преобразований именно оно обеспечивает минимальную величину такого отклонения.

Достоинства КЛ-преобразования:

- Концентрация мощности (дисперсии) в минимально возможном числе признаков.
- Минимальная среднеквадратичная погрешность восстановления исходного изображения при заданном числе признаков.
- Некоррелированность, а в случае нормального распределения яркости исходного изображения и независимость, рассчитываемых признаков.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГИЛЬБЕРТА

Преобразованием Гильберта сигнала *s(t)* называется интегральное преобразование вида:

$$\hat{s}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{s(\lambda)}{t-\lambda}d\lambda = \Gamma[s(t)] \quad (7)$$

По существу, уравнение (3.2) определяет преобразование Гильберта как свертку *x(t)* с оператором 1/t. Физически, Гильберт-преобразование может быть интерпретировано как естественный π/2 фазовращатель, который при прохождении *x(t)* через систему изменяет фазу всех частотных составляющих сигнала на π/2. С использованием этого выражения для $\hat{s}(t)$ мы можем определить аналитический сигнал *z(t).*

$$z(t) = s(t) + j\hat{s}(t) \quad (8)$$

В результате в распоряжении исследователя оказываются три функции времени:

- Мгновенная амплитуда (огибающая сигнала):

$$\omega(t) = \sqrt{s^2(t) + \hat{s}^2(t)} \quad (9)$$

- Мгновенная частота:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\omega(t)}\left[s(t)\frac{d\hat{s}(t)}{dt} - \hat{s}(t)\frac{ds(t)}{dt}\right] \quad (10)$$

- Мгновенная фаза:

$$\varphi(t) = arctg\frac{\hat{s}(t)}{s(t)} \quad (11)$$

Уравнение (8) можно перезаписать как

$$z(t) = \omega(t)e^{j\varphi(t)} \quad (12)$$

В этом уравнении выражение полярной координаты разъясняет локальную природу этого представления. Это - лучший способ амплитудного и фазового локального изменения тригонометрической функции *s(t)*. Гильбертова трансформанта формирует базис определения аналитического сигнала и дает единственный способ определить мнимую часть так, чтобы результат был аналитической функцией. В частотной области, у определения аналитического сигнала есть простая интерпретация, начиная с *TF[z(t)]*. Это одностороннее преобразование Фурье, где отрицательные частотные значения удалены, а положительные удвоены. Таким образом, аналитический сигнал может быть получен из действительного сигнала, обнулением спектра для отрицательных частот, которые не изменяют объем информации.

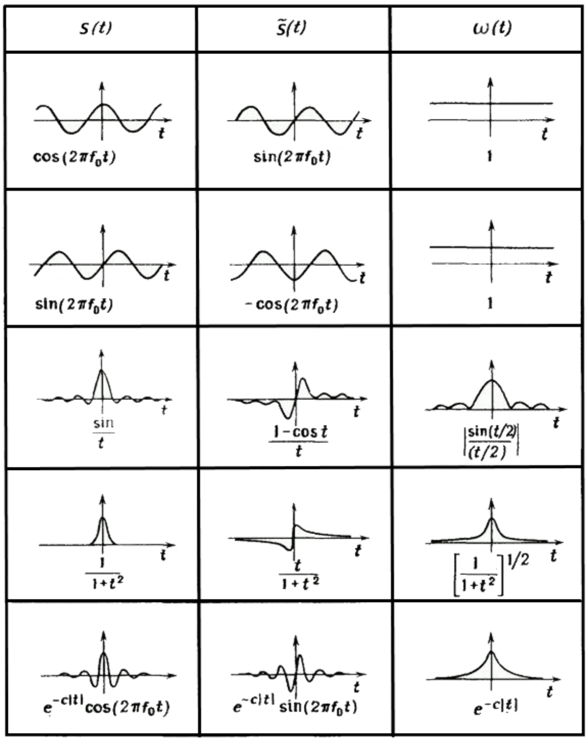

Рис. 2. Примеры преобразования Гильберта

Достоинства:

- Возможность получения текущих мгновенных значений частоты и фазы сигнала для произвольной длины реализации сигнала во временной области. Этим оно отличается от преобразования Фурье, которое дает математический корректный результат преобразования только при длине оригинала кратной частоте.
- Базисная функция синусоидальная.
- Структуры такие же, как и с преобразованием Лапласа, но только снято ограничение с частотами.

ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Это преобразование представляет собой свертку вейвлет-функции с сигналом. Вейвлет-преобразование переводит сигнал из временного представления в частотно-временное.

Способ преобразования функции (или сигнала) в форму, которая позволяет увидеть особенности исходного сигнала, или позволяет сжать исходный сигнал. Вейвлетное преобразование сигналов является обобщением спектрального анализа. Вейвлеты — это общее название математических функций определенной формы, которые локальны во времени и по частоте, но имеют разные формы, это удобно для выделения особенностей сигнала, которые присущи анализирующим вейвлетам. В каждом все функции получаются из одной базовой путем перемещения и растягивания. Именно таким образом и происходит вейвлет-преобразование, т.е. выбирается вейвлет, который имеет свои особенности, производится анализ конкретного участка анализируемой функции или сигнала, присваивается значение преобразования для этого участка и этой формы вейвлета. После этот вейвлет меняет размер (причем как по амплитуде, так и по частоте) и анализируется этот же участок, но уже выделяя большие или меньшие колебания, с учетом изменения самого вейвлета. Количество таких повторений называется глубиной анализа. Логично что большая глубина анализа даст лучший результат, но с другой стороны это займет большее количество времени для анализа. После всего этого вейвлет смещается по времени и происходит подобный анализ. В итоге вейвлет-преобразования получается матрица, которую нагляднее изображать как поверхность, в каждой точке которой имеется свой вес. На рис. 3 наглядно представлен результат вейвлет-преобразования функции, меняющей частоту.

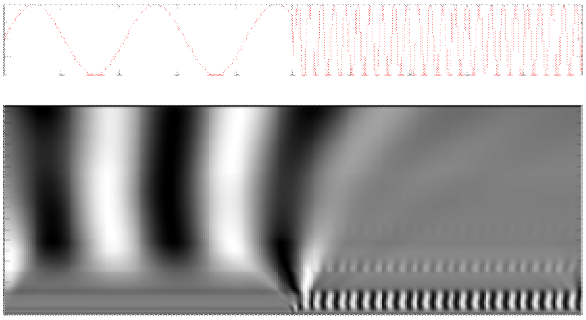

Рис. 3. Пример непрерывного вейвлет-преобразования сигнала, содержащего смену частоту

Вейвлет-преобразование широко используется для анализа сигналов, но также применяется и для сжатия сигналов. Очевидно что наиболее значимая информация в сигнале содержится при высоких амплитудах, а менее полезная — при низких. Сжатие данных получается за счет отбрасывания низких амплитуд. Вейвлет-преобразование позволяет получить высокое соотношение сжатия в сочетании с хорошим качеством восстановленного сигнала.

Достоинства:

- Вейвлетные преобразования обладают всеми достоинствами преобразований Фурье.
- Вейвлетные базисы хорошо локализованными как по частоте, так и по времени. При выделении в сигналах хорошо локализованных разномасштабных процессов можно рассматривать только те масштабные уровни разложения, которые представляют интерес.
- Базисные вейвлеты могут реализоваться функциями различной гладкости.

Недостатки:

- Относительная сложность преобразования.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бутырский Е.Ю. Взвешенное преобразование Гильберта и его свойства // Информация и космос. 2008. Вып. № 2. С. 40–46.
2. Бородин М.Ю., Кондаков К.А., Грязнов А.А. Синтез регулятора скорости электропривода в спектральной области. Уральский Федеральный Университет // Конференция молодых ученых. 2016. с.210-213
3. Отнес Р., Эноксон Л. Прикладной анализ временных рядов. Основные методы: Пер. с англ. – М.: Мир, 1982. - 428 с.
4. Солодовщиков А.Ю., Платонов А.К. Исследование метода Карунена-Лоэва. Российская академия наук Ордена Ленина // Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша, 2006. 29 с.
5. Солодовников В.В., Дмитриев А.Н., Егупов Н.Д. Спектральные методы расчета и проектирования систем управления. М.: Машиностроение, 1986. 440 с.